

問1 以下の各問に答えよ。

(1) 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

ただし、 $y(0) = 4$ とする。

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

(3) 上記(2)において、 $x = 3$ のとき $y = 0$ だという。 x を横軸、 y を縦軸として両者の関係を作図せよ。

問2 以下の各問に答えよ。

(1) 次の連立微分方程式より、 x と y の一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

(2) 次の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-3x}$$

ただし、 $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ とする。

問3 行列 $\mathbf{A}$ およびベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列を求めよ。
- (2) 連立方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の解を求めよ。

問4 行列 $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。

- (1) 行列 $\mathbf{A}$ の特性多項式 (固有多項式とも呼ばれる) を求めよ。
- (2) 複素数の範囲で $\mathbf{A}$ の固有値をすべて求めよ。