

双子のパラドックスを解く

仲 座 栄 三 *

A solution for the Twin Paradox in Einstein's relativity

Eizo NAKAZA

Abstract

The twin paradox, which occurs in Einstein's theory of relativity, will be resolved here. From the discussion of Einstein's special relativity, the *time dilation effects* can be predicted. When we regard the Earth's surface as a rest frame, then an astronaut in a rocket launched from the surface of the planet is in a temporal environment in which time runs slower than that for an observer on Earth. If they meet again after a long period, the astronaut will see that many years have passed for the Earth-bound observer but not for him. This is referred to as a *time dilation effect*. In the discussion, time in a moving frame that depends on the velocity of each relative velocity is defined as *proper time*. Consequently, all the celestial bodies drifting through the Universe have proper time determined by their relative velocities. However, the times observed by the observers within these systems are the same as each other. This is governed by principle of relativity.

Key Words : Twin paradox, special relativity, general relativity, Einstein, relative velocity

1. 序論

1905年に提示されたアインシュタインの特殊相対性理論によると、慣性系の一つと仮定される地球から見ると一定速度で移動している者は、地球上の観測者よりも歳を取らないことが示唆されている¹⁾。

しかし、地球上の観測者から、一定速度で移動していると判断されている者であっても、逆にその移動者から地球を見ると、地球こそが一定速度で移動していると判断され、地球上の観測者こそが“歳を取らない”と判断される。

これら2つの異なる視点からの主張は、互いに相反するものであり、これらの主張のみからはいずれの主張が正しいものであるかを判定し得ない。このことが双子のパラドックスと呼ばれている。

双子のパラドックスは、すでに解決された問題であるとする考えもある。例えば、地球から打ち上げられたロケットに乗る者は、地球に帰還するのに旅の途中で必ずロケットをUターンさせなければならず、そのようなイベントは地球上の観測者には存在しない。従って、「ロケット内の観測者の方が移動していたのであって、ロケット内の観測者の方が歳を取らない」とする考え方である。

しかしながら、上述のUターンという操作に基づく考

え方は、逆にロケット内の観測者から見ると、地球こそが何らかの方法で減速し、Uターン、そして加速したのであって、地球がロケットに向かって帰還したのでであると反論される。したがって、上述した「ロケットの方が移動していた」とする説明は必ずしも正しくない。

相対性理論に拘る専門書などには、ロケットが飛行軌道を乗り換えたのであるとする説明が与えられている場合もある。しかしながら、それとて、地球人こそが慣性軌道を乗り換えたのであるとする主張で反論されてしまう。

こうして、信じ難いことではあるが、特殊相対性理論にまつわる双子のパラドックスは、その謎が未だ解けぬままに残されていると言える。

本論の主たる目的は、このアインシュタインの特殊相対性理論に拘る双子のパラドックスの謎を解くことにある。

2. ミューオンの観測と相対性理論

地表から約20kmも上空の大気圏上層に宇宙線が衝突しミューオンが発生すると言われている。このミューオンを地球上で発生させると、その半減期は $1.5\mu s$ 程度となって観測されることが知られている。

そのように極めて短い半減期を有するミューオンが、例え光速で移動したとしても、その有意な移動距離は400~500m程度でしかない。したがって、遙か20kmも離れ

受理：2011年9月1日

*工学部環境建設工学科

(Department of Civil Engineering & Architecture,

Faculty of Engineering, University of the Ryukyus)

た大気圏上層で発生したミュオンが、地表で有意な現象として観測されるはずはないと判断される。

こうした疑問に、アインシュタインの特殊相対性理論は次のような説明を与える。

地球上で静止していると認識している観測者が、彼に対して一定速度で移動している物体を観測すると、その物体の移動方向の長さは収縮して観測される。また、その物体に付随する時間も収縮して観測される。これらのことは、ローレンツ収縮と呼ばれ、アインシュタインの相対性理論で説明される。

相対性理論によると、慣性系の一つと仮定される地球上の観測者に対して一定速度（光速度に近い速度）で移動している他の系の時間は、収縮効果によって地球上の時間よりもゆっくり進む。したがって、移動しているものとして観測されているミュオンの時計は、地球上に静止した観測者の時間よりもはるかに短い時の経過を示すことになる。

また、移動している物の長さは、その移動方向に縮んで観測されるため、地球上で高度 20km と観測されている長さも、ミュオンからは縮んで観測される。こうした空間と時間の収縮効果が、地表でミュオンが観測される理由であると説明される。

以上の説明によると、地球上の観測者にとって長時間が経過したと観測される事実が、移動しているミュオン自身にとっては $1.5\mu s$ 程度の経過時間でしかないことになる。この問題を地球とロケットの問題に当てはめると、移動しているロケット内の時計の示す時間は、地表の時計の示す時間よりも遅れ、したがって“ロケット内の旅人は、地表で彼の帰りを待つ観測者に比較して歳を取らない”と判断されてもよさそうである。

しかしながら、こうした解釈は一方的なものである。地球上の観測者に都合の良いようにできている。ミュオンが仮に人なら、こうした地球上の観測者の説明と全く相反する説明を与えることになる。地球こそが移動していると。このように相反する主張の存在は、相対性原理が保証することでもある。

さて、それではどうすれば、こうした迷走的思考から脱却できるのだろうか？以下にその事に対する解答が与えられる。

3. 双子のパラドックスの解決

特殊相対性理論の構築の際にアインシュタインによって導入された「光速度不変の原理」が不要なものであるとされた上で、相対性原理のみに拠る特殊相対性理論が構築されている²⁾。それによると、いかなる慣性系の観測者に対しても光速度は不変となって観測されることが相対性理論から保証される。したがって、光速度の不変性を理論構築の前提条件として先に導入する必要はまったくないと説明される。

一見して、アインシュタインによって導入された光速

度不変の原理は相対性原理の導入と相対峙する内容にある。なぜなら、一方が絶対的な物理現象の存在を主張し、他方が物理現象の相対性を主張するからである。

そうでないと主張される場合、相対性原理の導入と光速度不変の原理の導入は、蛇足的に 2 重の宣言を与えていることになる。なぜなら、静止系と仮定される系内の観測者に観測される現象は、移動慣性系の観測者にも全く同様に観測されなければならないことが相対性原理によって要求されるからである。

相対性原理は、いかなる慣性系内に現れる物理現象もまったく同じ物理法則によって規定されることを保障する。光速度は観測者に観測される電磁現象の内の 1 つである。その 1 つの現象のみを取り出し、それに相対性原理に加えて、他の特別な原理を導入しなければならないとする理由は全く存在しない。このことが、光速度不変の原理を必要としない理由となっている。

こうして相対性理論は相対性原理のみに拠って構築される。相対性原理によると、静止系と仮定される系内の観測者の時間も、これに対して移動系と判断される系内の観測者の時間も共に、まったく同じでなければならない。そうでないと、両者に時間の非対称性が生まれてしまい、相対性原理の導入が不可能となる。

相対性原理の下では、対比されるいかなる慣性系内の現象もそれぞれ全く同じである。このことは、相対性理論構築の大前提である。したがって、相対性原理の導入の下では、いかなる慣性系間においても時計の針の進み方に違いがあってはならないことになる。

しかしながら、アインシュタインの特殊相対性理論は、「移動系の時計の針の進み方が、静止系の時計の針の進みよりも遅れる」と説明している。それは、数式を用いて次のように説明される¹⁾。

$$t' = \gamma t \quad (1)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2 / C^2} \quad (2)$$

ここに、 t は静止系内の観測者が観測する時間、 t' は移動系内の観測者が直に測る時間を表す。また、 C は光の速度、 v は慣性系間の相対速度を表す。

同時に、アインシュタインの相対性理論は、相対速度の方向と平行な方向に、移動系の長さが次のように収縮して観測されることを主張している。

$$L = \gamma L_0' \quad (3)$$

ここに、 L は静止系の観測者によって観測される移動系内に静止した物の長さであり、 L_0' はそれが移動系内の観測者に静止して観測されている場合の長さを表す。

一般に $\gamma < 1$ であり、したがって、移動系内の時間や長さは、静止系のそれらに比較して収縮していることにな

る。

ここで、問題は式 (1) 及び (3) の解釈にある。ローレンツを始めとしてアインシュタインも、これらの関係式より、移動系の空間（ここでは移動方向の長さを意味する。以後、収縮するのは移動方向の空間であることを意味するものとする）や時間は、静止系のそれらと比較して収縮していると説明した。こうした解釈が、双子のパラドックスを派生させている要因と言える。

著者の考える式 (1) 及び (3) の解釈は以下のとおりである²⁾。

まず、自分が座す系を静止系と認識している観測者から観測すると、その他の移動慣性系内の空間は短縮して観測される（式 (3) の解釈）。しかし、その観測には、それが静止して観測される場合よりも余計に時間がかかる（式 (1) の解釈）。すなわち、時間に対する解釈は、ローレンツやアインシュタインの解釈と異なる。

こうして、自らは静止していると認識している観測者が自分に対して移動している物の長さやそれに付随する時間を観測すると、それらは短縮や伸びたものとなって観測されるため、それらが移動系内の観測者に静止して観測される場合の値とは異なったものとなる。

空間や時間の客観的な判断は、それらが観測者に対して静止して観測される場合にのみ成り立つ。すなわち、観測者に対して移動している物の観測結果は、相対性理論を通じてのみ正しい判断が可能となる。以下にその理由について述べる。

我々は、目前にある物体の長さを測ろうとするとき、その物体が静止している場合、定規や光測量を用いて容易にかつ高精度に測ることができる。例えば、目前に静止した 2 点間（点 A 及び点 B 間）の長さ L_0 を光測量によって測るのに、観測時間が $t = (t_B - t_A)$ 秒であったとする。このとき、我々は、次のような関係式が成立することを当然視している。

$$L_0 = C(t_B - t_A) \quad (4)$$

ここに、 t_A は光が点 A を通過する瞬間に点 A に置かれた時計の指す時刻であり、 t_B は光が点 B に到達した瞬間に点 B に置かれた時計が示す時刻を表す。

光が点 A から点 B に届いた瞬間に光がそこで反射され、再び点 A に到達した瞬間に点 A にある時計の示す時刻を t_{AA} とすると、次のような関係式が成立するのも当然視される。

$$t_{AA} - t_A = 2(t_B - t_A) \quad (5)$$

式 (5) は、光測量の際に光が行きに要した時間と帰りに要した時間とが等しいことを表し、離れた 2 点に静止した時計が、それぞれ互いに合っているための必要十分条件となる。

相対性原理を導入するに当たって、全ての現象は等方

的に観測されるものであることをアприオリとしている。したがって、電磁現象も等方的に観測され、光の速さは等方的なものであることが当然視される。そのようなとき、相対性原理は、光の速さが移動系の観測者に対しても、アприオリに等方的なものとなって観測されなければならないことを要求する。

したがって、相対性原理の下では光速不変の原理の導入をまったく必要としない。また、慣性系の 1 つと仮定される地球上で、式 (4) 及び式 (5) の成立はアприオリに正しいとされる。地球上において、時間や距離、そして光の速度が方向に依存していることは、相対性原理の導入の時点であり得ない話となる。

このように、静止している観測者が、彼に対して静止している物の長さを測る場合、例えば、定規を用いる場合には、その測られる区間の始点と終点とに“同時に”左右の手で支えた定規をあてがい測定することができる。

また、光を用いた測量においても、測定の対象物が観測者に対して静止している場合は、光測量が正しく行われ、式 (4) 及び (5) の条件は満たされる。

しかしながら、測定しようとする対象物が観測者に対して移動している場合には、問題はそう単純でない。定規を用いた測量においても、定規を対象区間の始点と終点とに“同時に”あてがうことが困難となる。ある瞬間に測る物の始点に定規のゼロ点を当て、同時に終点に定規の目盛をあてようとしても、測定対象物が動いているはそう簡単でない。正しく測定するには、観測者が動いている対象物と同じスピードで移動し、対象物と相対的に静止した状態となって測るしか術がなくなる。

光を用いた測量においても状況は同様となる。光が測定対象区間の始点を通過し、終点に向かったとしても、対象物が動いているのでは、正しい測量にならない。こうして、動いている物の測量は、単純でなくなる。

動いている物の長さが正しく測量されてないとすると、動いているものの観測では式 (4) 及び (5) の関係が満たされていないことになり、時間さえも正しく判断されていないとする結果をもたらす。それがゆえに、動いているものの長さやそれに関係する時間を正しく測定するには相対性理論が必要となる。

相対理論による式 (1) や式 (3) が示すように、相対的に動いて見える物体の観測時間や長さを測定したとしても、それらは相対速度に依存して観測される。相対速度が大きいものほど空間が短縮して観測され、その観測には時間がかかる。こうして時間や長さも相対的なものとして観測されるものであることを、相対性理論は教える²⁾。

相対速度の異なる物の長さや時間を観測したとして、それらを正しく比較するには、相対速度がゼロとなる状態での測量結果と等しくなるように換算した上で行う必要がある。それを成し得るのが、相対性理論が与える変換則（ローレンツ変換）の適用である。

以上の議論の下に、ミューオンの観測の問題について再度議論してみる。

まず、地球上で静止しているミューオンの半減期は、 $1.5\mu s$ 程度と観測される。相対性理論によると、それが高速で移動している場合には、その観測に先の観測時間よりも長い時間を必要とする。それを式 (1) で表すと以下のように表される。

$$t = t' / \gamma \quad (6)$$

ここに、 t は静止系内にいると認識している観測者による観測時間である。今の場合、 $t' = 1.5\mu s$ である。

ミューオンが観測者に対して一定の速度で移動して観測される場合、式 (6) で示されるように、観測時間は相対速度に依存し、時間が伸びた状態となって観測される。

このことは、例えば、10 万光年離れた星の光が 10 万年の時を経て地球上で観測されることと同様と言える。距離の存在は、観測に必要な時間経過と同義となる。遠く離れた星間では、一瞬の爆発でも他方には例えば 10 万年の時を経てしか測定されない。これと同様に、観測者に対して一定速度で飛行する現象の観測には、それが静止して観測される場合よりも観測に長い時間を必要とする。また、飛行物体の長さは飛行方向に収縮して観測される。

大気圏上層の高さが地上約 20km と測定されるのは、それが地上の観測者に静止して観測されている時の長さである。その長さは、ミューオンから観測すると、収縮して観測される。例えば、500m 程度の長さとなって観測される。

ミューオン自身からすると、地表に垂直に立てた長さ 500m 程度の定規が、ほぼ光の速さで飛行してきたと観測されるのである。ミューオンがその観測に要した時間は、当然ながら、

$$t = (1.5\mu s) / \gamma \quad (7)$$

程度となる。

この測定時間は、降り注ぐミューオンを地上で観測した場合の測定時間と同じである。すなわち、地上にいる観測者に対しても、あるいはミューオン自身にしても、自分に対して移動している現象の観測に要する時間は、式 (6) すなわち式 (7) で与えられる。いずれの観測者も、移動している現象を測定したので、それが観測者に静止して観測される場合よりも測定に時間を長く要したのである。

次に、これまでの考察を、ロケット内の観測者と地上の観測者との間に存在する双子の問題として当てはめてみる。ロケット内の観測者を兄とすると、それは地上に降り注ぐミューオンに対応する。したがって、地上の観測者は弟に相当する。

双子の内の弟が、彼に対して一定速度で移動するロケット内の兄の飛行の様子を観測した場合の観測時間と、逆に兄が地上の様子を観測した場合に要した時間とは式 (6) 及び (7) が示すように、全く同じである。した

がって、再会時には兄も弟も同じだけ齢を取っていないなければならない。

互いに静止し、その時に $1.5\mu s$ 程度の現象としてお互いが確認し合った事であっても、両者間に相対速度が現れる場合は、静止時よりも観測に時間を要する。相対速度が大きくなるほど観測時間は伸びる。

したがって、これまで説明されてきたロケットの中の時間が地上の観測者の時間よりも遅れるという解釈は誤りと言える。いずれの観測者も、互いの観測時間は等しいのである。そのことは、当初から相対性原理が要求することでもあった。

ある現象が観測者に静止して観測されるとき観測時間を t_0 とするとき、それが観測者に移動して観測される場合には測定時間は t_0 / γ となって観測される。その一定速度で移動している現象が、観測者に対して静止して観測される場合には、式 (1) に基づき、観測時間は $\gamma \times (t_0 / \gamma)$ 、すなわち t_0 となる。こうしてローレンツの変換式は、移動している現象の観測値を、静止系の観測者がその移動系に飛び乗って観測する場合、すなわち観測者が静止している現象として観測する場合の空間や時間を与える。

以上をまとめると、双子のパラドックスの問題の解決は、以下のように説明される。

例えば、地上を発射したロケットが、ある一定の速度で旅を続け、100 年後に地上に帰ってきたと地上で観測されているとき、ロケット内の観測者もまったく同様に 100 年間の旅であったと判断する。したがって、双子の歳は再会時にはまったく同じである。

しかし、この 100 年間というは、実はロケットの飛行速度に依存して変化する。異なる相対速度で旅を続ける場合、両者の観測時間は相対速度に依存して変化する。

観測時間が相対速度に依存するとしても、それらが静止した現象として観測される場合、それらの観測時間は統一される。したがって、双子のパラドックスというような問題は派生されない。

移動系内の観測者に目前で静止して観測される空間の長さ L_0' は、それが静止系から移動系内の長さとして観測されるとき、次のように与えられる。

$$L = \gamma L_0' \quad (8)$$

同時に、静止系が観測に要した時間は、 $t = t' / \gamma$ で与えられる。ここに、 t' は移動系内の観測者がその系内で静止した現象として観測した場合の観測時間を表す。

したがって、静止系の観測者に測られる移動系内の光の速さは、例えば移動方向に、次のように与えられる。

$$L_0' / t' = (\gamma L_0') / \{\gamma (L_0' / C)\} = C \quad (9)$$

すなわち、光の速さは観測者の立場によらず、一定値 C となって観測されるとする結論を得る。

こうして、相対性理論は、光の速さが相対速度に依存せず、いかなる観測者にも一定値となって現れることを

教える。

2011 年 9 月 23 日, 名古屋大学など国際グループは, 「ニュートリノの速度が光の速さを超えて観測された」とする発表を行なった。その詳細は明らかでないが, 730km もの距離を移動する速さを光とニュートリノとで比較したと報じられている。それによると, ニュートリノの速度の測定値がわずかに光の速度よりも速いものとなっている。

質量を有するニュートリノの速度が光の速度を超えたとなると, 素粒子に対する相対性理論は, その基準を光の速度からさらに高速な他の速度に切り替える必要がある, 相対性理論の再構築が必要となるものと考えられる。

4. 結論

アインシュタインの相対性理論に付随して現れた双子のパラドックスは, ある観測者とそれに対して一定速度で移動していると判断されている観測者とが, 互いに「相手の方が齢を取るのが遅い」と主張するものであった。

この双子のパラドックスの発生は, アインシュタインが特殊相対性理論の構築において, 式 (1) を演繹し, 「移動系の観測者の時間は, 静止系の観測者の時間よりも遅れる」と判断したことに起因している。

式 (1) は, 静止系で静止した現象として観測される時の観測時間と, それが一定速度で移動しているものとして観測される時の観測時間とに違いがあることを示しており, 正しくは観測時間が相対速度に依存して (相対的に) 伸びたものとして観測されるものであると解釈されるべきであった。

相対性原理によれば, 静止系の観測者の持つ時計の針の進み方も, 彼から一定速度で移動していると判断されている移動系内の観測者の持つ時計の針の進み方も, まったく同一となる。このことは, 相対性理論構築の前提でもあった。

したがって, 地上に残る弟の時計も, 弟から一定速度で移動していると判断されているロケット内の兄の時計も, それぞれにまったく同じ進み方を示し, いくら時間が経過しても, 両者の齢は互いに全く同じとなる。したがって, 兄と弟が再会するには, 互いにまったく同じだけ時の経過を必要とする。

しかし, 移動しているものの観測にはそれが静止して観測される場合よりも長い時間を要し, 観測時間は, 相対速度に依存したのものとなる。空間や時間は, 観測者に対して静止した現象として観測されて初めて, それらの大きさが相対速度に依存せず統一的かつ客観的に比較される。

一般相対性理論は, 議論の内容を重力や加速度の存在箇所にまで広げ, 重力や加速度の存在する場では, 我々の空間や時間の観測値が重力や加速度の大きさに依存したものとなっていることを教えている。一般相対性理論では, 重力や加速度の有無に非対称性を認めている。したがって, 一般相対性理論の下では, 実質的な時間の遅れや進みが存在し得る。

素粒子が光の速度を超えているとする観測値がつい最近報じられている。その点の議論は今後の課題と言える。

本研究の遂行に当たって, 琉球大工学部環境建設工学科の松原仁助教, 入部綱清助教との議論が大変意義なものであった。ここに記し, 感謝の意を表します。また, ミューオンの速度やニュートリノの速度に関する言及は, 本論の通読の段階で, 通読者からの助言を経て追記されたものである。

参考文献

- [1] 内山龍雄 (1988) : アインシュタイン相対性理論, 岩波文庫, 187p.
- [2] 仲座栄三 (2011) : 相対性原理に拠る相対性理論, ボーダーインク, 98p.